Wiederholungsklausur: Analysis III

(als 6 KP-Fach, Zwei-Fächer-Bachelor)

WS 2006/2007 Grieser
17.04.2007

1. Aufgabe

Berechnen Sie das Volumen des Körpers

$$\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\; x^2+y^2\le 1,\, x^2+z^2\le 1\right\}.$$

2. Aufgabe

$$\text{Sei}\quad \begin{array}{rcl}\varphi:(0,1)\times(0,1) & \to & \mathbb{R}^3\\ (u,v) & \mapsto & (u^2,\, u+v,\, v^2).\end{array}$$

a) Zeigen Sie, dass φ eine injektive Immension ist.

b) Geben Sie einen Integralausdruck für die Fläche des Bildes von φ an. Sie brauchen das Integral nicht auszuwerten.

c) Bestimmen Sie den Tangentialraum an das Bild von φ im Punkt $\varphi\left(\frac{1}{2},\,\frac{1}{3}\right)$.

3. Aufgabe

Zeigen Sie mit Hilfe der Sätze über des LEBESGUE-Integral: Ist $f\in\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$, so gilt

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int\limits_{K_\epsilon(0)} f = 0,$$

wobei $K_\epsilon(0)=\{x\in\mathbb{R}^n:\|x\|<\epsilon\}$ ist.

4. Aufgabe

Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch?
Begründen Sie Ihre Antwort (Beweis oder Gegenbeispiel).

a) Sind f_k (für $k\in\mathbb{N}$) und f beschränkte integrierbare Funktionen auf $\mathbb{R}^n$ und gilt $f_k\to f$ punktweise, so folgt $\int f_k\to\int f$ (jeweils für $k\to\infty$)?

b) Das Bild einer Immension $\varphi:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ ist eine Untermannigfaltigkeit?

c) Ist $f:[0,1]\to\mathbb{R}^n$ eine C^1-Kurve mit $\|\gamma'(t)\|=1$ für alle t, so gilt

$$\|\gamma(1)-\gamma(0)\|\le 1.$$