Wiederholungsklausur: Analysis III

WS 2006/2007 Grieser
17.04.2007

1. Aufgabe

Berechnen Sie das Volumen des Körpers

$$\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \; x^2 + y^2 \leq 1, \, x^2 + z^2 \leq 1\right\}.$$

2. Aufgabe

Sei $\begin{array}{rcl} \varphi : (0,1) \times (0,1) & \to & \mathbb{R}^3 \\ (u, v) & \mapsto & (u^2, \, u + v, \, v^2). \end{array}$

a) Zeigen Sie, dass φ eine injektive Immension ist.

b) Geben Sie einen Integralausdruck für die Fläche des Bildes von φ an. Sie brauchen das Integral nicht auszuwerten.

c) Bestimmen Sie den Tangentialraum an das Bild von φ im Punkt $\varphi\left(\frac{1}{2}, \, \frac{1}{3}\right)$.

3. Aufgabe

Sei V ein C^1-Vektorfeld auf $\mathbb{R}^n$ mit

$$\operatorname{div} V(x) = 0 \;\text{ für alle }\; x \in \mathbb{R}^n.$$

a) Zeigen Sie: Für jedes kompakte Gebiet $K \subset \mathbb{R}^n$ mit glattem Rand gilt

$$\int\limits_{\partial K} < V, \nu > ds = 0,$$

wobei ν das äußere Einheitsnormalenfeld ist.

b) Folgern Sie aus a): Für jedes $r > 0$ gibt es ein $x \in \mathbb{R}^n$ mit $\|x\| = r$, so dass $V(x)$ senkrecht auf x steht.

4. Aufgabe

Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch?
Begründen Sie Ihre Antwort (Beweis oder Gegenbeispiel).

a) Sind f_k (für $k \in \mathbb{N}$) und f beschränkte integrierbare Funktionen auf $\mathbb{R}^n$ und gilt $f_k \to f$ punktweise, so folgt $\int f_k \to \int f$ (jeweils für $k \to \infty$)?

b) Das Bild einer Immension $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ ist eine Untermannigfaltigkeit?

c) Ist $f : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ eine C^1-Kurve mit $\|\gamma'(t)\| = 1$ für alle t, so gilt

$$\|\gamma(1) - \gamma(0)\| \leq 1.$$