Klausur Analysis III

WS 2006/2007 Grieser
19.2.2007

1. Aufgabe

Sei $0 < a < 1$. Berechnen Sie Volumen und Oberfläche des Körpers

$$K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{array}{l} x^2+y^2+z^2 \le 1 \\ \quad x^2+y^2 \le a^2 \end{array}\}$$

(Machen Sie eine Skizze!)

2. Aufgabe

Sei $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 = \sin x,\ x \in [0,\pi]\}$.

a) Zeigen Sie, dass M eine 1-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^2$ ist.

b) Bestimmen Sie einen Integralausdruck für die Länge von M. Sie brauchen das Integral nicht auszuwerten.

c) Bestimmen Sie je einen Tangentialvektor (nicht den Nullvektor) an M in den Punkten

$$\left(\frac{\pi}{4}, \frac{1}{2}\right),\ \left(\frac{\pi}{2}, 1\right),\ (0,0)\,.$$

Skizzieren Sie M!

3. Aufgabe

Sei $f = (0,\infty) \to \mathbb{R}$ eine C^1-Funktion und V das Vektorfeld

$$\begin{aligned} V(x) &= f(\|x\|)\,x \\ &= (\,f(\|x\|)\,x_1, \ldots, f(\|x\|)\,x_n\,) \end{aligned}$$

($x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$).

a) Zeigen Sie, dass V die Integrabilitätsbedingungen für die Existenz einer Stammfunktion erfüllt.

b) Zeigen Sie, dass V eine Stammfunktion besitzt, wie folgt:

b1) Sei $g : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ eine C^1-Funktion und

$$u(x) = g(\|x\|).$$

Bestimmen Sie $\nabla u(x)$ (als Ausdruck mit g').

b2) Zeigen Sie, dass $V(x) = \nabla u(x)\ \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ genau dann gilt, wenn zwischen f und g die Relation

$$f(r) = \frac{g'(r)}{r}\ \forall r > 0$$

besteht.

b3) Wie bestimmt man g aus f?

b4) Prüfen Sie Ihr Ergebnis anhand des Beispiels $f(r) = \frac{1}{r}$ nach.

4. Aufgabe

Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch?
Begründen Sie Ihre Antwort.

a) Ist u eine harmonische Funktion auf $\mathbb{R}^n$ mit $u(x) \geq 0\ \forall x$ und $u(0) = 0$, so ist $u(x) = 0\ \forall x$?

b) Die Menge $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 0\}$ ist eine Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$?

c) Ist $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine integrierbare Funktion mit

$$\int f(x)dx > 0,$$

so ist $\{x : f(x) > 0\}$ keine Nullmenge?

d) Sind $N, M \subset \mathbb{R}^2$ Nullmengen, so ist auch $N + M = \{p + q : p \in N,\ q \in M\}$ eine Nullmenge?