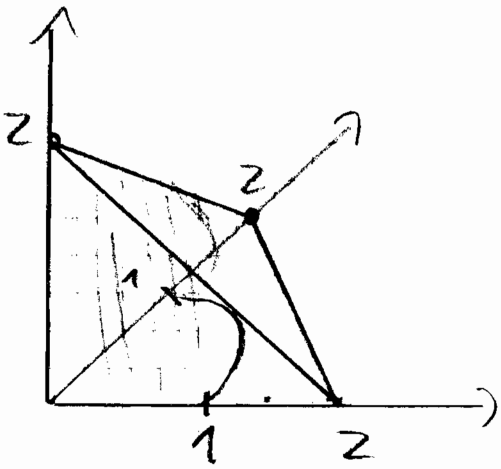
Lösungen Klausur Analysis III (19.1.07)

1)a)



Polarkoordinaten für x, y:

$x \geq 0, y \geq 0 \Rightarrow \varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$

$x^2 + y^2 \leq 1 \Rightarrow r \in [0, 1]$

Dann $0 \leq z \leq 2 - x - y = 2 - r\cos\varphi - r\sin\varphi$

(Beachte: $2 - r\cos\varphi - r\sin\varphi \geq 0$, da $r \leq 1$ und $|\cos\varphi| \leq 1$, $|\sin\varphi| \leq 1$)

$$\Rightarrow \text{Volumen} = \int_0^1 \int_0^{\pi/2} \int_0^{2 - r(\sin\varphi + \cos\varphi)} dz \, d\varphi \, r\,dr$$

$$= \int_0^1 \int_0^{\pi/2} \left(2 - r(\sin\varphi + \cos\varphi)\right) d\varphi \, r\,dr$$

$$= \int_0^1 \left[2\varphi + r\cos\varphi - r\sin\varphi\right]_{\varphi=0}^{\pi/2} r\,dr$$

$$= \int_0^1 (\pi - 2r)\, r\,dr = \int_0^1 (\pi r - 2r^2)\,dr$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}.$$

1) b) $\det \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \end{pmatrix} = \frac{1}{x} + \frac{y}{x^2} = \frac{x+y}{x^2}$

$\Rightarrow \det \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \frac{x^2}{x+y}$

$\Rightarrow$ Außerdem $\left.\begin{array}{l} 0 < y \leq x \\ 1 \leq x+y \leq 2 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{array}{l} 0 < v \leq 1 \\ 1 \leq u \leq 2 \end{array}$

und $(x,y) \mapsto (u,v)$ invertierbar, da

$\cancel{x=}\ u = x+y = x+vx \Rightarrow x = \frac{u}{1+v}$

$y = u - x = u - \frac{u}{1+v} \Rightarrow y = \frac{uv}{1+v}$

die Umkehrung definiert.

Also $\int\limits_D \frac{x+y}{x^2}\,dx\,dy = \int\limits_{\substack{1\leq u\leq 2 \\ 0<v<1}} \underbrace{\frac{x+y}{x^2}\cdot\left|\det\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|}_{=1} du\,dv$

$= \int_0^1\int_1^2 du\,dv = \boxed{1.}$

2) a) $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : f(x,y,z) = 0\}$

mit $f(x,y,z) = x^2 + y^4 + z^4 - 1$

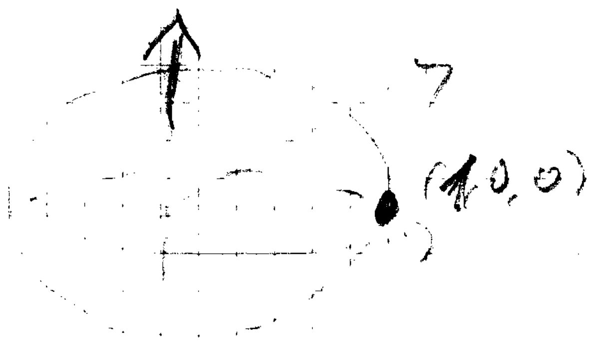
Es ist $\nabla f(x,y,z) = (2x, 4y^3, 4z^3)$.

Also $\nabla f(x,y,z) = 0 \Leftrightarrow (x,y,z) = (0,0,0)$

Da $0^2 + 0^4 + 0^4 - 1 \neq 0$, ist $(0,0,0) \notin M$.

Also $\nabla f \neq 0$ auf $M \Rightarrow M$ ist Mannigfaltigkeit.

b) Skizze:



Auflösen nach x der Gleichung $x^2 + y^4 + z^4 = 1$

ergibt $x = \sqrt{1 - y^4 - z^4}$

(+, da nahe $x = 1$). Für (y,z) nahe $(0,0)$

ist dies eine Parametrisierung, da dann $\sqrt{1-y^4-z^4}$

eine C^1-Funktion ist.

c) $T_q M = \operatorname{Ker} Df|_q = \{(v_1,v_2,v_3) : 2x v_1 + 4y^3 v_2 + 4z^3 v_3 = 0\}$

Dies enthält $v = (0,0,1)$

$\Leftrightarrow 4z^3 = 0 \Leftrightarrow z = 0$.

Also: Alle Punkte mit $z = 0$, d.h. $\{(x,y,0) : x^2 + y^4 = 1\}$.

3) $\ell(r) = \int_a^b \sqrt{1 + (r f(x))'^2}\, dx = \int_a^b \sqrt{1 + r^2 f'(x)^2}\, dx$

Die Funktion $r \longmapsto \sqrt{1+r^2 f'(x)^2} \ldots$

ist differenzierbar (∞ oft) für jedes x, mit Ableitungen:

1. Ableitung nach r: $\dfrac{\cancel{2} r f'(x)^2}{\cancel{2}\sqrt{1+r^2 f'(x)^2}} = 0$ bei $r=0$

2. Ableitung nach r: $\dfrac{f'(x)^2}{\sqrt{1+r^2 f'(x)^2}} + r \cdot f'(x)^2 \cdot \left(\text{Ableitung von } \dfrac{1}{\sqrt{\ldots}}\right)$

$$= f'(x)^2 \text{ bei } r = 0.$$

Da die Ableitungen stetig sind, auf dem kompakten Intervall $[a,b]$ (also beschränkt, gleichmäßig für r nahe einem beliebigen r_0), (*)

folgt, dass ℓ zweimal differenzierbar ist mit

$$\ell'(r) = \int_a^b \frac{d}{dr}\sqrt{1+r^2 f'(x)^2}\, dx \underset{\text{bei } r=0}{=} \int 0 = 0$$

und analog $\ell''(0) = \int_a^b |f'(x)|^2\, dx$

(*) Die Funktionen $(r,x) \mapsto h(r,x) := \sqrt{1+r^2 f'(x)^2}$ und $\frac{\partial h}{\partial r}, \frac{\partial^2 h}{\partial r^2}$ sind stetig in (r,x), also beschränkt auf Kompakta, also Majorante = eine Konstante.

4) a) Falsch. Denn das Komplement $\{x \in \mathbb{R}^n : x_1 \in \mathbb{Q}\}$ ist eine Nullmenge (Vereinigung der Hyperebenen $\{x \in \mathbb{R}^n : x_1 = q\}$ über alle $q \in \mathbb{Q}$, das sind abzählbar viele).

Da $\mathbb{R}^n$ keine Nullmenge ist, kann die Menge selbst nicht auch Nullmenge sein.

b) Falsch. Beispiel: $A =$ die x-Achse $\{(x,0) : x \in \mathbb{R}\}$

Dann $\{x : (x,0) \in A\} = \mathbb{R}$ keine Nullmenge, aber A ist Gerade in $\mathbb{R}^2$, also Nullmenge.

c) Falsch. Die leere Menge ist offen und eine Nullmenge.

Für nicht-leere offene Mengen ist es wahr, denn $x \in U \Rightarrow K_\varepsilon(x) \subset U$ für ein $\varepsilon > 0$, und $vol(K_\varepsilon(x)) > 0$ $\Rightarrow vol(U) > 0$.

d) Falsch. $A = \mathbb{Q}$ Nullmenge, aber $\bar{A} = \mathbb{R}$ keine Nullmenge.