Wiederholungsklausur: Modul "Analysis II"

SS 2006 Grieser
11.10.2006

Zeit: 120 Minuten

1. Aufgabe

Finden Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y''' + 3y'' - 4y = e^{-t}.$$

2. Aufgabe

Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$(1 + 2t^2)y' + t = 4ty,\ y(0) = 1.$$

3. Aufgabe

Finden Sie ein reelles Fundamentalsystem für das System von Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} x' &= 2x + 2y \\ y' &= -2x + 2y. \end{aligned}$$

Finden Sie die Lösung mit $x(0) = 1,\ y(0) = 0$ und skizzieren Sie deren Orbit.

4. Aufgabe

Bestimmen Sie alle lokalen Maxima und Minima der Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

$$f(x, y) = x + y + 2\cos x + 2\cos y.$$

5. Aufgabe

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sei eine C^1-Funktion.
Angommen, $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^n$ ist eine Integralkurve des Vektorfeldes $V(x) = \nabla f(x)$.

a) Zeigen Sie, dass die Funktion

$$h : [0, 1] \to \mathbb{R}$$

$$h(t) = f(\gamma(t))$$

monoton wächst.

b) Folgern Sie: Falls γ geschlossen ist, d. h. $\gamma(0) = \gamma(1)$, so muss γ schon konstant sein, d. h. $\gamma(t) = \gamma(0)\ \forall t \in [0,1]$.

6. Aufgabe

Welche der folgenden Aussagen über C^2-Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sind wahr, welche falsch? Genau hinsehen!
Geben Sie eine Begründung bzw. ein Gegenbeispiel.

a) Falls f in $(0,0)$ ein lokales Minimum hat, so gilt

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) \geq 0.$$

(Die Koordinaten in $\mathbb{R}^2$ werden mit (x,y) bezeichnet.)

b) Falls $f(0,0) = 0$ und eine Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ existiert mit

$$f(x,y) = 0 \Leftrightarrow y = g(x)$$

für alle (x,y) in einer Umgebung von $(0,0)$, so folgt $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) \neq 0$.

c) Für jede kompakte Menge $K \subset \mathbb{R}^2$ existiert ein $(x_0, y_0) \in K$ mit $\nabla f(x_0, y_0) = 0$.