1. Aufgabe

Charackteristisches Polynom: $\lambda^3 + 3\lambda^2 - 4 = p(\lambda)$

Eine Nullstelle: $\lambda = 1$.

Faktorisiere: $(\lambda^3 + 3\lambda^2 - 4) : (\lambda - 1) = \lambda^2 + 4\lambda + 4$

$$\begin{array}{l} \lambda^3 - \lambda^2 \\ \hline \quad 4\lambda^2 \\ \quad 4\lambda^2 - 4\lambda \\ \hline \qquad 4\lambda - 4 \end{array}$$

$= (\lambda + 2)^2$

Also $p(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda + 2)^2$.

$$y_{hom} = C_1 e^{t} + C_2 e^{-2t} + C_3 t e^{-2t}.$$

Inhomogen: $p(-1) = -2 \neq 0 \Rightarrow$ spezielle Lösung ist

$$y_{inhsp} = \frac{1}{-2} \cdot e^{-t}$$

Allgemeine Lösung:

$$C_1 e^{t} + C_2 e^{-2t} + C_3 t e^{-2t} - \frac{1}{2} e^{-t}$$

2. Aufgabe

Die Gleichung ist linear in y, 1. Ordnung.

Homogene Gleichung: $(1+2t^2)\,y_h' - 4t\,y_h = 0$

$$\Leftrightarrow \quad y_h' - \frac{4t}{1+2t^2}\,y_h = 0.$$

Allgemeine Lösung: $y_h = C \cdot e^{\int \frac{4t}{1+2t^2}dt}$

$$\int \frac{4t}{1+2t^2}\,dt = \int \frac{1}{u}\,du \quad \text{(Substitution } u = 1+2t^2,\ du = 4t\,dt\text{)}$$

$$= \log|u|$$

$$= \log|1+2t^2| = \log(1+2t^2), \text{ da } 1+2t^2 > 0$$

$$\Rightarrow y_h = C\cdot(1+2t^2)$$

Inhomogene Gleichung: $y' - \frac{4t}{1+2t^2}\,y = -\frac{t}{1+2t^2}$

Variation der Konstanten: $y(t) = c(t)\cdot y_h(t)$

$$\Rightarrow c' = y_h^{-1}\cdot\left(-\frac{t}{1+2t^2}\right) = -\frac{t}{(1+2t^2)^2} \quad \text{(z.B. } C=1\text{)}$$

$$\Rightarrow c = -\int \frac{t}{(1+2t^2)^2}\,dt = -\frac{1}{4}\int \frac{1}{u^2}\,du \quad (u = 1+2t^2 \text{ wie oben})$$

$$= \frac{1}{4u} = \frac{1}{4(1+2t^2)}$$

$$\Rightarrow y_{inhom} = \frac{1}{4} \Rightarrow y = \frac{1}{4} + C(1+2t^2).$$

AB: $y(0)=1 \Rightarrow 1 = \frac{1}{4} + C \Rightarrow C = \frac{3}{4} \Rightarrow \boxed{y = 1 + \frac{3}{2}t^2}$

3 Aufgabe $\vec{y} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. $\vec{y}' = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \vec{y}$

Charakteristisches Polynom: $\lambda^2 - 4\lambda + 8$, Nullstellen $\lambda = 2 \pm 2i$

$\lambda_1 = 2 + 2i$: Eigenvektor $\begin{pmatrix} -2i & 2 \\ -2 & -2i \end{pmatrix} \vec{v}_1 = 0$

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ eine Lösung ist $e^{(2+2i)t} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = e^{2t} e^{2it} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$

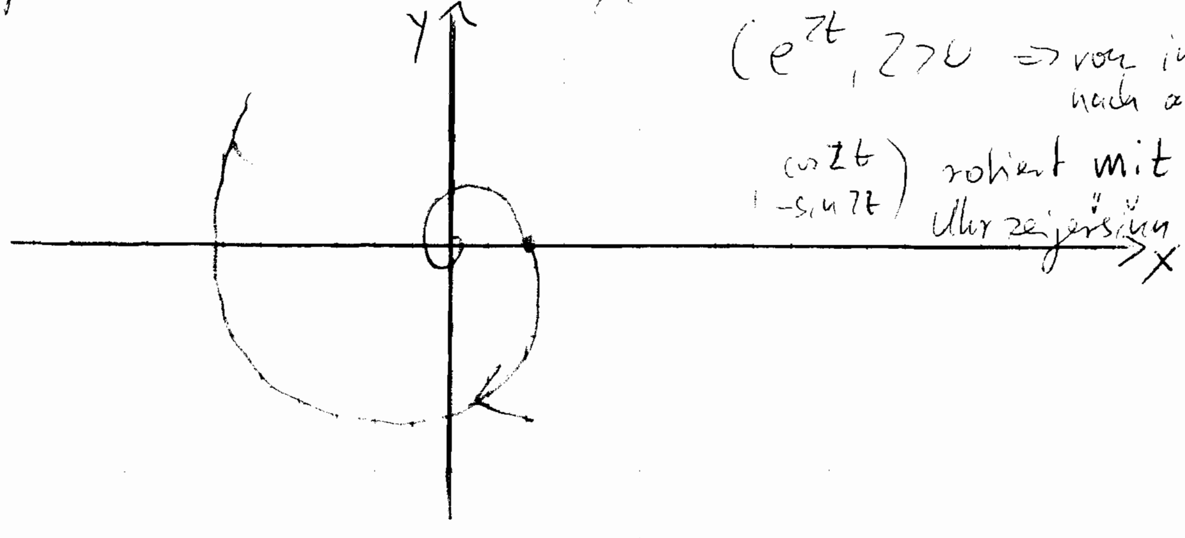
Da die Gleichung reell ist, bilden Real- und Imaginärteil hiervon ein reelles F.S.

$$e^{2t} e^{2it} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = e^{2t} \begin{pmatrix} \cos 2t + i \sin 2t \\ i \cos 2t - \sin 2t \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Realteil $\vec{y}_1 = e^{2t} \begin{pmatrix} \cos 2t \\ -\sin 2t \end{pmatrix}$

Imaginärteil $\vec{y}_2 = e^{2t} \begin{pmatrix} \sin 2t \\ \cos 2t \end{pmatrix}$

$\vec{y}_1$ erfüllt die AB $x(0) = 1, y(0) = 0$



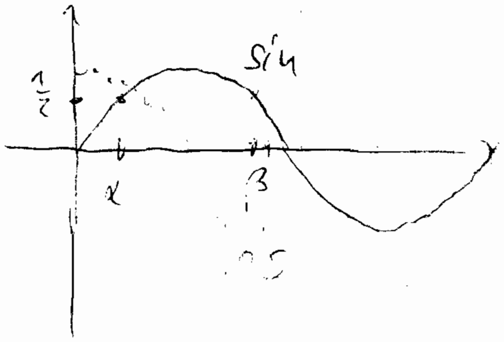
$(e^{2t}, 2 > 0 \Rightarrow$ von innen nach außen

$\begin{pmatrix} \cos 2t \\ -\sin 2t \end{pmatrix}$ rotiert mit dem Uhrzeigersinn $)$

4. Aufgabe

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 1 - 2\sin x \\ 1 - 2\sin y \end{pmatrix}$$

Also $\nabla f(x,y) = 0 \iff \sin x = \frac{1}{2}, \; \sin y = \frac{1}{2}$.



Es ist $\sin x = \frac{1}{2}$

$\iff x = \alpha + 2\pi k \;, k \in \mathbb{Z}$

oder $x = \beta + 2\pi k \;, k \in \mathbb{Z}$

$(\alpha = \frac{\pi}{6} \hat{=} 30^\circ, \; \beta = \frac{5}{6}\pi \hat{=} 150^\circ)$

Außerdem $\cos(\alpha + 2\pi k) = \cos\alpha > 0$
$\cos(\beta + 2\pi k) = \cos\beta < 0$

Hesse-Matrix $\quad H_f(x,y) = \begin{pmatrix} -2\cos x & 0 \\ 0 & -2\cos y \end{pmatrix}$

Dies ist indefinit, wenn $\cos x, \cos y$ verschiedene Vorzeichen haben $\rightsquigarrow$ kein lokales Extremum.

Lokale Maxima: H_f negativ definit $\iff \cos x > 0, \cos y > 0$.

Also $\quad x = \alpha + 2\pi k, \; y = \alpha + 2\pi l \;, k, l \in \mathbb{Z}$

Lokale Minima: H_f positiv definit $\iff \cos x < 0, \; \cos y < 0$

Also $\quad x = \beta + 2\pi k, \; y = \beta + 2\pi l, \; k, l \in \mathbb{Z}$

5. Aufgabe

a) $h'(t) = \nabla f(\gamma(t)) \cdot \underbrace{\gamma'(t)}$
$= \nabla f(\gamma(t))$, da γ Integralkurve im ∇f.

Also

(*) $h'(t) = |\nabla f(\gamma(t))|^2 \geq 0$, also monoton wachsend.

b) Falls $\gamma(0) = \gamma(1)$, so $h(0) = f(\gamma(0)) = h(1) = f(\gamma(1))$.

h monoton wachsend, $h(0) = h(1) \Rightarrow h =$ konstant

$\Rightarrow h'(t) = 0 \ \forall t \Rightarrow \nabla f(\gamma(t)) = 0 \ \forall t$ nach (*)

$\Rightarrow \gamma'(t) = 0 \ \forall t$ (da γ Integralkurve)

$\Rightarrow \gamma$ konstant

6. Aufgabe

a) <u>Wahr</u>. Falls f in $(0,0)$ ein lokales Minimum hat, so hat auch die Funktion

$$x \mapsto f(x,0)$$

in $x=0$ ein lokales Minimum.

Also ist deren zweite Ableitung bei $x=0$ nicht-negativ. Diese ist gerade $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)$.

(Alternativ: $H_f(0,0) \geq 0$, d.h. $\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} \geq 0$ bei $(0,0)$,

$\Rightarrow$ Diagonalelemente ≥ 0 $\Rightarrow$ $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 0$)

b) <u>Falsch</u>.
z.B. $f(x,y) = y^2$, dann $f(x,y) = 0 \Leftrightarrow y = 0$, also $g(x) = 0$.

Aber $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y = 0$ bei $(0,0)$.

(Was stimmt: <u>Falls</u> $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) \neq 0$, so existiert so ein g.)

c) <u>Falsch</u>, z.B. $f(x,y) = x$, K beliebig.
Es existiert überhaupt kein Punkt mit $\nabla f = 0$,
weil $\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\forall x,y$.

(Was stimmt: Auf kompakten K hat f ein Maximum oder Minimum in K. <u>Falls</u> dies im Inneren von K liegt, ist dort $\nabla f = 0$.)